则在 V 内存在互相正交的单位向量 η_1,η_2，使

$$\begin{cases} \mathscr{A}\eta_1 = cos\theta\cdot\eta_1 - sin\theta\cdot\eta_2, \\ \mathscr{A}\eta_2 = sin\theta\cdot\eta_1 + cos\theta\cdot\eta_2. \end{cases}$$

于是 $M = L(\eta_1,\eta_2)$ 为 V 的二维不变子空间，$\mathscr{A}\mid_M$ 在 M 的标准正交基 η_1,η_2 下的矩阵为 2 阶正交矩阵

$$S = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

性质 9.1 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 内的正交变换，如果 M 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，则 $M^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

定理 9.116 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 内的正交变换，则在 V 内存在一组标准正交基，使 $\mathscr{A}$ 在该组基下的方阵表示成如下对角形：

$$J = diag(B, S_1, S_2, \cdots, S_l),$$

其中 $B = diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$，$\lambda_i = 1 或 -1 (i = 1,2,\cdots,k)$，

$$S_j = \begin{pmatrix} cos\theta_j & -sin\theta_j \\ sin\theta_j & cos\theta_j \end{pmatrix} (\theta_j \neq k\pi, j = 1,2,\cdots,l).$$

10 对称变换

定义 10.68 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 内的线性变换，如果对 V 中任意向量 α,β 都有 $(\mathscr{A}\alpha,\beta) = (\alpha,\mathscr{A}\beta)$，则称 $\mathscr{A}$ 为 V 内一个对称变换.

定理 10.117 n 维欧氏空间 V 内的线性变换 $\mathscr{A}$ 是对称变换的充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵.

定理 10.118 实对称矩阵 A 的特征多项式的根都是实数.

推论 10.118.8 欧氏空间 V 内任意一个对称变换只少有一个特征值.

性质 10.1 设 $\mathbb{A}$ 是欧氏空间内的一个对称变换，则其对应于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量 η_1, η_2 互相正交.

性质 10.2 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换，若 M 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，则 $M^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

定理 10.119 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换，则在 V 内存在一组标准正交基，使 $\mathscr{A}$ 在此组基下的矩阵成对角形.

推论 10.119.9 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵, 则存在 n 阶正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT = T'AT = D$ 为对角矩阵.

11　正交变换的应用 (化二次型为标准型的正交线性变数替换)

定义 11.69 对一个实二次型 $f = X'AX$ 作线性变数替换 $X = TY$，如果 T 是一个正交矩阵，则称为正交线性变数替换.

定理 11.120 给定实二次型

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

则存在一个 n 阶正交矩阵 T，使在线性变数替换 $X = TZ$ 下二次型化为标准型

$$\lambda_1 z_1^2 + \cdots \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2,$$

且 λ_i 除了排列次序外是被 f 唯一确定的，就是二次型 f 的系数矩阵是 A 的全部特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$（可以重复，考虑重数）.

具体算法：

(1) 设二次型 f 的系数矩阵是 A，求出 A 的全部特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$.

(2) 对每个 λ_i 求 $(\lambda_i E - A)X$ 的基础解系并将其 schmidt 正交化，设得到的列向量组对应的矩阵 L_i(列向量排列次序任意).

(3) 所求的正交矩阵 $T = (L_1, \cdots, L_k)$，所求的对角形

$$D = T^{'}AT = diag(\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \cdots, \lambda_k),$$

其中 λ_i 出现的个数就是 $rank(L_i)$，即 $(\lambda_i E - A)X$ 的基础解系对应的解空间的维数.

(4) 最后作变数替换 $X = TZ$ 就可以把二次型化为标准型.

12 酉空间

说明：酉空间有的学校的考研试题不考，读者可以选读.

12.1 基本概念

酉空间就是复数域 $\mathbb{C}$ 上的定义了酉空间内积的向量空间，酉空间内积 (α, β) 满足：

(1) $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in V$ 有 $(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta)$;

(2) $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$，因此 $\forall \alpha \in V, (\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}$;

(3) $\forall \alpha \in V, (\alpha, \alpha) \geqslant 0$，且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

. 向量的模或长度，单位向量的定义同欧几里得空间，注意 $k \in \mathbb{C}, |k\alpha| = |k| \cdot |\alpha|$. 注意酉空间的向量没有夹角的概念. 酉空间向量正交的定义和欧几里得空间向量正交的定义相同，酉空间中的零向量也和任意向量都正交.

12.2 酉空间的标准正交基

性质 12.1 酉空间 V 内两两正交的非零向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 所组成的向量组线性无关.

定义 12.70 一个 n 维酉空间 V 内 n 个两两正交的单位向量组成的向量组称为 V 的一组标准正交基.

设酉空间 V 中的向量 α 在一组标准正交基下的坐标为 $(x_1, \cdots, x_n)$,向量 β 的坐标为 $(y_1, \cdots, y_n)$,则 $(\alpha, \beta) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$. 酉空间的 Schimidt 正交化方法和欧几里得空间相同.

12.3　酉空间标准正交基间的过渡矩阵

定义 12.71 设 U 是一个 n 阶可逆复矩阵. 如果 $\overline{U'} = U^{-1}$，则称 U 是一个酉矩阵.

定理 12.121 n 维酉空间 V，$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基，U 是一个 n 阶复方阵，令 $(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)U$，则 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是标准正交基的充分必要条件是 U 是一个酉矩阵.

12.4　酉空间的正交补

定义 12.72 设 V 是一个 n 维酉空间,M 是 V 的子空间.$M^{\perp} = \{\alpha \in V \mid (\alpha, m) = 0, \forall m \in M\}$，称 $M^{\perp}$ 为 M 的正交补.

性质 12.1 $V = M \oplus M^{\perp}$.

13　酉变换

定义 13.73 设 $\mathbb{U}$ 是酉空间 V 内的一个线性变换，满足 $(\mathbb{U}\alpha, \mathbb{U}\beta) = (\alpha, \beta)(\forall \alpha, \beta \in V)$，则称 $\mathbb{U}$ 是一个酉变换.

定理 13.122 设 $\mathbb{U}$ 是 n 维酉空间 V 内的一个线性变换，则下列命题等价:

(i) $\mathbb{U}$ 是一个酉变换；

(ii) $\forall \alpha \in V$，$|\mathbb{U}\alpha| = |\alpha|$；

(iii) $\mathbb{U}$ 把标准正交基变为标准正交基；

(iv) $\mathbb{U}$ 在标准正交基下的矩阵是酉矩阵.

定理 13.123 设 V 是一个 n 维酉空间, 设 $U(n)$ 表示 V 中全体酉变换所构成的集合. $O(n)$ 具有如下性质：

(1) $\mathscr{E} \in U(n)$；

(2) 若 $\mathscr{A},\mathscr{B}\in U(n)$, 则 $\mathscr{A}\mathscr{B}\in U(n)$；

(3) 若 $\mathscr{A}\in U(n)$，则 $\mathscr{A}$ 可逆，且 $\mathscr{A}^{-1}\in U(n)$.

14 共轭变换

定义 14.74 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维酉空间 V 内的一个线性变换. 如果 V 内一个线性变换 $\mathscr{A}^*$ 满足如下条件：$\forall\alpha,\beta\in V$ 有 $(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*\beta)$，则称 $\mathscr{A}^*$ 为 $\mathscr{A}$ 的共轭变换.

定理 14.124 $\mathscr{A}^*$ 为 $\mathscr{A}$ 的共轭变换的充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 在此组基下的矩阵 B 为 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵 A 的共轭转置.

性质 14.1 设 $\mathscr{U}$ 是酉变换，则有 $\mathscr{U}^*=\mathscr{U}^{-1}$.

性质 14.2 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是酉空间 V 的线性变换，$\lambda\in\mathbb{C}$，则有：

(1) $\mathscr{E}^*=\mathscr{E}$；

(2) $(\mathscr{A}^*)^*=\mathscr{A}$；

(3) $(\lambda\mathscr{A})^*=\overline{\lambda}\mathscr{A}^*$；

(4) $(\mathscr{A}\pm\mathscr{B})^*=\mathscr{A}^*\pm\mathscr{B}^*$；

(5) $(\mathscr{A}\mathscr{B})^*=\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

15 正规变换

定义 15.75 n 维酉空间 V 内一个线性变换 $\mathscr{A}$ 如与其共轭变换可交换 $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为一个正规变换. 注：酉变换是正规变换.

定理 15.125 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维酉空间 V 内的线性变换，如果 M 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，则 $M^\perp$ 是 $\mathscr{A}$ 的共轭变换 $\mathscr{A}^*$.

定理 15.126 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维酉空间 V 内的一个正规变换，而 λ 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值，其对应的特征向量为 α，其是 $\mathbb{A}^*$ 属于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量.

定理 15.127 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维酉空间 V 的一个正规变换，则其属于不同特征值的特征向量相互正交.

推论 15.127.10 设 $\mathscr{U}$ 是 n 维酉空间 V 的一个酉变换，则在 V 内存在一组标准正交基，使 $\mathscr{U}$ 在这组基下的矩阵成对角形.

16　厄米特 (Hermite) 变换

16.1　定义和性质

定义 16.76 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维酉空间 V 的一个线性变换，且 $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 是一个厄米特 (Hermite) 变换. 如果 A 是一个 n 阶复方阵，如果 $\overline{A'} = A$，则称 A 是一个厄米特矩阵.

性质 16.1 厄米特变换的特征值都是实数.

定理 16.128 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维酉空间 V 中的一个厄米特变换，则在 V 中存在一组标准正交基，使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是实对角矩阵.

推论 16.128.11 设 A 是 n 阶厄米特矩阵,则存在一个 n 阶酉矩阵 U, 使 $U^{-1}AU = \overline{U'}AU = D$ 是一个实对角矩阵.

16.2　厄米特二次型

定义 16.77 n 个复变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数 $f = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j(a_{ij} = \overline{a_{ji}})$ 称为一个厄米特二次型，f 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad f = \overline{X'}AX.$$

定理 16.129 对于一个厄米特二次型

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_i}x_j(a_{ij}=\overline{a_{ji}}),$$

存在一个酉矩阵 U，使在酉线性变数替换 $X=UY$ 下，它变为如下的标准型

$$d_1\overline{y_1}y_1+\cdots+d_n\overline{y_n}y_n,$$

其中 $d_1,\cdots,d_n$ 均为实数，除了排列次序外，是被 f 唯一确定的，其恰为 f 的矩阵 A 的 n 个特征值.

（四）

例题

17 例 1

例 1 (**镜面反射**) 设 η 是 n 维欧氏空间 V 内的一个单位向量，定义 V 内的一个线性变换如下：$\mathscr{A}\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta(\forall\alpha\in V)$ 称这种线性变换是 V 内的一个镜面反射. 证明：

(1) 镜面反射是 V 内正交变换；

(2) 镜面反射在 V 的任意一组基下的矩阵的行列式为 -1；

(3) $\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$ 即 $\mathscr{A}^{-1}=\mathscr{A}$；

(4) 对 V 内任意正交变换 $\mathscr{B}$，$\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 也是一个镜面反射.

解　(1) 我们有

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta) &= (\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\beta-2(\eta,\beta)\eta)\\ &= (\alpha,\beta)-2(\eta,\alpha)(\eta,\beta)-2(\eta,\beta)(\eta,\alpha)+4(\eta,\alpha)(\eta,\beta)(\eta,\eta)\\ &= (\alpha,\beta),\end{aligned}$$

故 $\mathscr{A}$ 为 V 内正交变换.

(2) 将 $\eta=\epsilon_1$ 扩充为 V 的一组标准正交基 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$，我们有 (注意 $(\eta,\epsilon_i)=(\epsilon_1,\epsilon_i)=0$，当 $i>1$ 时)，

$$\mathscr{A}\epsilon_1=\epsilon_1-2(\eta,\epsilon_1)\eta=\eta-2\eta=-\epsilon_1,\quad \mathscr{A}\epsilon_i=\epsilon_i-2(\eta,\epsilon_i)\eta=\epsilon_i(i>1),$$

故 $\mathscr{A}$ 在此组基下的矩阵为

$$diag(-1,1,1,\cdots,1).$$

显然 $|A|=-1$，$\mathscr{A}$ 在任意一组基下的矩阵与 $\mathscr{A}$ 相似，相似矩阵的行列式相等，故 $\mathscr{A}$ 在任何一组基下的矩阵的行列式是 -1.

(3) $\mathscr{A}^2$ 在 (2) 中取定的标准正交基下的矩阵是 $A^2=E$，故 $\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$.

(4) 因为 $\mathscr{B}^{-1}$ 也是正交变换，故 $\forall\alpha\in V$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{B}\alpha &= \mathscr{B}^{-1}(\mathscr{B}\alpha-2(\eta,\mathscr{B}\alpha)\eta)\\ &= \alpha-2(\eta,\mathscr{B}\alpha)\mathscr{B}^{-1}\eta\\ &= \alpha-2(\mathscr{B}^{-1}\eta,\mathscr{B}^{-1}(\mathscr{B}\alpha))\mathscr{B}^{-1}\eta\\ &= \alpha-2(\mathscr{B}^{-1}\eta,\alpha)\mathscr{B}^{-1}\eta.\end{aligned}$$

因为

$$(\mathscr{B}^{-1}\eta,\mathscr{B}^{-1}\eta)=(\eta,\eta)=1,$$

故

$$\mathscr{B}^{-1}\eta$$

是 V 中一个单位向量，上式表明：

$$\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{B}$$

是由单位向量 $\mathscr{B}^{-1}\eta$ 决定的镜面反射.

（五）

练习题

18 练习 1

在欧氏空间 V 中：

(1) 若向量 α,β 等长，证明：$\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 正交，作出几何解释；

(2) 设 $dimV=n,S$ 是 V 的子空间，$S^{\perp}$ 是 V 中的一切与 S 正交的向量所成的集合，证明：$S^{\perp}$ 是 V 的子空间，且 $dimS+dim(S^{\perp})=n$，$(S^{\perp})^{\perp}=S$.

证明 (1) 由

$$(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta),$$

则

$$(\alpha+\beta,\alpha-\beta)=(\alpha,\alpha)+(\alpha,-\beta)+(\beta,\alpha)+(\beta,-\beta)=(\alpha,\alpha)-(\beta,\beta)-(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)=0.$$

几何解释：表示菱形两对角线互相垂直.

(2)

$$S^{\perp}=\{\alpha\mid(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in S\},\forall\alpha_1,\alpha_2\in S^{\perp},\forall k\in\mathbb{R}\text{及}\forall\beta\in S,$$

则

$$(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)=0,(k\alpha_1,\beta)=k(\alpha_1,\beta)=0.$$

故 $S^{\perp}$ 是 V 的子空间. 下证 $V=S\oplus S^{\perp}$.